Capítulo 1

INTRODUCCIÓN A LA LÓGICA

1. Fundamentación básica

- **Enunciado simple:**

Frase, oración declarativa simple que es verdadera o falsa; pero no ambas cosas (lógica bivalente).
Los enunciados simples no son suficientes para expresar una mínima parte de la terminología matemática. Podemos notar que cuando expresamos nuestras ideas por medio de frases intervienen conectivos como “no”, “y”, “o”..., los cuales enlazan enunciados simples.

- **Conectivos lógicos:**

Son partículas que actúan sobre enunciados simples formando enunciados más complejos. Los más básicos son:

Nombre	**Símbolo**	**Se lee**
La negación	$\sim$ ó $\urcorner$	“no...” “no es cierto que...”, “es falso que...”
La conjunción	$\wedge$	“... y ...”, “...e...”
La disyunción	$\vee$	“... o ...”
El condicional	$\rightarrow$	“si ... entonces ...”
El bicondicional	$\leftrightarrow$	“... si y sólo si ...”

- **Enunciado compuesto:**

Formado por la unión de enunciados simples mediante conectivos.
Ejemplo:
Sean los dos razonamientos siguientes:
A) Si la sociedad de los hombres ha de ser siempre como ahora, entonces la corrupción es eterna.
Es así que la corrupción no es eterna.
Luego no ha de ser siempre como ahora la sociedad de los hombres.

B) Si florecen las hortensias, entonces se marchitan los tulipanes
Es así que no se marchitan los tulipanes. Luego no florecen las hortensias.

Si en estas argumentaciones se reemplaza a los enunciados simples por:

La sociedad de los hombres ha de ser siempre como ahora = p
La corrupción es eterna = q
Florecen las hortensias = r
Se marchitan los tulipanes = s

Se tiene:

A) Si p, entonces q.
Es así que no q.
Luego no p.

B) Si r, entonces s.
Es así que no s.
Luego no r.

En estos enunciados compuestos se mantiene la forma y se varía el contenido. Es decir hay unas partículas que se mantienen constantes y otras que varían.
(Se ha definido **variables** como expresiones que por sí mismas no tienen ninguna significación determinada y las partículas que son **constantes** son los conectivos para la lógica).
Además se puede identificar que a la lógica no le interesa el contenido de las sentencias, sino sólo la estructura formal de las relaciones entre los enunciados.
El contenido de las sentencias se representa mediante variables, signos que constituyen a enunciados cualesquiera. Se utilizan las letras minúsculas “p”, “q”, “r”, “s”, “t”, etc. como variables de enunciado.

Ejemplo:

A) $[(p \rightarrow q) \wedge \sim q] \rightarrow \sim p$

B) $[(r \rightarrow s) \wedge \sim s] \rightarrow \sim r$

Se observa que:
- Los signos de agrupación son los signos de puntuación de la lógica. No es lo mismo tener $[(p \rightarrow q) \wedge \sim q] \rightarrow \sim p$ que $(p \rightarrow q) \wedge [\sim q \rightarrow \sim p]$ o que $p \rightarrow [(q \wedge \sim q) \rightarrow \sim p]$

- La agrupación ayuda a determinar cual es el conectivo de mayor fuerza en el enunciado compuesto (Para el ejemplo, en ambos casos, es el segundo condicional).

1.1 VALORES DE VERDAD:

- Un enunciado simple es siempre o bien verdadero o bien falso, es decir, tiene un sólo valor de verdad.
- El valor de verdad de un enunciado compuesto depende del valor de verdad de los enunciados simples que lo conforman y de la relevancia de los conectivos que intervienen según estén agrupados.
  Los básicos son:

p	~p
V	F
F	V

p	~p
1	0
0	1

Si

p	q	$p\wedge q$	$p\vee q$	$p\to q$	$p\leftrightarrow q$
V	V	V	V	V	V
V	F	F	V	F	F
F	V	F	V	V	F
F	F	F	F	V	V

Ó

p	q	$p\wedge q$	$p\vee q$	$p\to q$	$p\leftrightarrow q$
1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	0	0
0	1	0	1	1	0
0	0	0	0	1	1

También es usual:

p	$\overline{p}$
1	0
0	1

p	q	p•q	p+q
1	1	1	1
1	0	0	1
0	1	0	1
0	0	0	0

- Es decir, si se tiene una sola variable el número de combinaciones posibles es dos (V,F), si son dos variables es cuatro (VV, VF, FV , FF) ... lo cual responde a la estructura 2^n siendo n el número de variables.
- Si se tienen dos variables enlazadas mediante la conjunción, el enunciado compuesto resultante es verdadero sólo si ambos enunciados simples son verdaderos. Si el enlace se hace mediante la disyunción el enunciado compuesto resultante es verdadero si alguno de los dos enunciados simples es verdadero. Para el enunciado compuesto $p\to q$ se tiene que es verdadero en todos los casos, excepto si p es V (verdadero) y q es F (falso).
- Para el enunciado compuesto $p\leftrightarrow q$ se tiene que es verdadero si ambos enunciados simples son V ó F.

1.2 Proposición o polinomio booleano:

Es una combinación de variables lógicas mediante conectivos.

Se representa una proposición mediante una letra mayúscula y un paréntesis que encierra las variables lógicas que intervienen en ella.

Por ejemplo: P(r, s ,t) es una proposición en las variables r, s, t.

Si P(r, s, t): $[(r\to s)\wedge(s\to t)]\to(r\to t)$ su valor de verdad sería:

r	s	t	r→s	s→t	r→t	(r→s) ∧ (s→t)	[(r→s)∧(s→t)]→(r→t)
V	V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	F	F	F	V
V	F	V	F	V	V	F	V
V	F	F	F	V	F	F	V
F	V	V	V	V	V	V	V
F	V	F	V	F	V	F	V
F	F	V	V	V	V	V	V
F	F	F	V	V	V	V	V

Al tener tres variables lógicas, el polinomio booleano tiene $2^3 = 8$ posibles combinaciones:

r	s	t
V	V	V
V	V	F
V	F	V
V	F	F
F	V	V
F	V	F
F	F	V
F	F	F

Estas tres columnas se pueden intercambiar al igual que las ocho filas y la estructura se mantiene:
Para una variable, cuatro posibilidades V y cuatro F, para la otra dos y dos y para la otra una y una.

1.3 Tautología, contradicción, e indeterminación:
Una **tautología** (T), es una proposición cuya tabla de verdad consta de V solamente.
Una **contradicción** (C), es una proposición cuya tabla de verdad consta de F solamente.
Una tautología es verdadera siempre, no importa los valores de verdad que asuman las variables. Una contradicción es falsa siempre.
Una **indeterminación** (I), es una proposición cuya tabla de verdad consta de V y F (no es ni tautología ni contradicción).
De la definición se tiene que la negación de una tautología es una contradicción (~V ≡ F) y viceversa (~F ≡ V).

Ejemplo:
Probar si los siguientes polinomios booleanos son T, C ó I.

A) P(p, q, r): [(p ∧ q) → r] → (p ∨ r)
B) Q(r, s, t): [(r → s) ∧ (s → t)] → (r → t)
C) R(x, y, z): [(x ∧ y) → x] → [(y ∨ z) ∧ (~y ∧ ~z)]

A) $[(p \wedge q) \to r] \to (p \vee r)$

p	q	r	$p \wedge q$	$(p \wedge q) \to r$	$p \vee r$	$[(p \wedge q) \to r] \to (p \vee r)$
1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	0	1	1
1	0	1	0	1	1	1
1	0	0	0	1	1	1
0	1	1	0	1	1	1
0	1	0	0	1	0	0
0	0	1	0	1	1	1
0	0	0	0	1	0	0

Como su tabla de verdad consta de "1" y "0" es una indeterminación.

B) $[(r \to s) \wedge (s \to t)] \to (r \to t)$
Del ejemplo dado anteriormente se tiene que su tabla de verdad consta de "1" solamente, por lo tanto es una tautología.

C) $[(x \wedge y) \to x] \to [(y \vee z) \wedge (\sim y \wedge \sim z)]$

x	y	Z	$x \wedge y$	$(x \wedge y) \to x$	$y \vee z$	$\sim y \wedge \sim z$	$(y \vee z) \wedge (\sim y \wedge \sim z)$	$[(x \wedge y) \to x] \to [(y \vee z) \wedge (\sim y \wedge \sim z)]$
1	1	1	1	1	1	0	0	0
1	1	0	1	1	1	0	0	0
1	0	1	0	1	1	0	0	0
1	0	0	0	1	0	1	0	0
0	1	1	0	1	1	0	0	0
0	1	0	0	1	1	0	0	0
0	0	1	0	1	1	0	0	0
0	0	0	0	1	0	1	0	0

Como su tabla de verdad consta solamente de "0" es una contradicción.
Para la lógica son de suma importancia las tautologías y las contradicciones.

1.4 RELACIONES ENTRE PROPOSICIONES

1.4.1 Implicación lógica ($\Rightarrow$)

Establece una relación de dependencia causal entre los enunciados o fórmulas articuladas.
La implicación lógica simboliza el proceso de deducción o razonamiento que media entre la hipótesis y la tesis.
Definición: se dice que una proposición P(p,q,...) implica lógicamente a una proposición Q(p,q,...), lo cual se escribe P(p,q,...) $\Rightarrow$ Q(p,q,...), si se verifica una de las siguientes condiciones:
i) ~P(p,q,...) v Q(p,q,...) es una tautología
ii) P(p,q,...) $\wedge$ ~Q(p,q,...) es una contradicción
iii) P(p,q,...) $\to$ Q(p,q,...) es una tautología

La más usual es iii) que en sentido práctico se recomienda:

$P \Rightarrow Q$ si y sólo si $P \rightarrow Q$ es una T

$P \Rightarrow Q$ se puede leer como:
P implica a Q
Q se deduce de P
Q es una consecuencia lógica de P
P es condición suficiente para Q
Q es condición necesaria para P
Q se sigue de P
P sólo si Q

P se llama: Antecedente
Hipótesis
Dato
Q se llama: Consecuente
Tesis
Conclusión

La relación de implicación lógica cumple con las siguientes propiedades: (sean P,Q,R proposiciones en las mismas variables).

i) Reflexiva: $P \Rightarrow P$
ii) Antisimétrica : si $P \Rightarrow Q$ no necesariamente
$Q \Rightarrow P$
($Q \not\Rightarrow P$) o de otra forma $a R b \wedge b R a$ si y solo si $a = b$
iii) Transitiva: si $P \Rightarrow Q \wedge Q \Rightarrow R$ entonces
$P \Rightarrow R$

1.4.2 Equivalencia lógica ($\equiv$, $\Leftrightarrow$)
Dos proposiciones P y Q en las mismas variables son equivalentes si y solamente si tiene la misma tabla de verdad.
Se denota $P \equiv Q$ ó $P \Leftrightarrow Q$ y se lee:
P equivale lógicamente a Q, ó P y Q son equivalentes, P si y sólo si Q, P es condición necesaria y suficiente para Q, Q es condición necesaria y suficiente para P.
$P \equiv Q$ si y sólo si $P \leftrightarrow Q$ es una T
$P \equiv Q$ equivale a tener $P \Rightarrow Q \wedge Q \Rightarrow P$

La relación de equivalencia lógica cumple con las siguientes propiedades:
(Sean P, Q, R proposiciones en las mismas variables).
i) Reflexiva: $P \equiv P$
ii) Simétrica: si $P \equiv Q$ entonces $Q \equiv P$
iv) Transitiva: si $P \equiv Q \wedge Q \equiv R$ entonces $P \equiv R$

1.4.3 Condicional e implicación. Bicondicional y equivalencia

Cuando se dice “si p, entonces q” se usa el lenguaje (el lenguaje de la lógica de enunciados) para expresar que lo enunciado por p es condición suficiente de lo enunciado por q, es decir, para expresar una relación entre enunciados.
En cambio, cuando se dice “p implica q” se usa el **metalenguaje** del cálculo de enunciados para expresar una relación **no entre enunciados**, sino entre nombres de enunciados, y en este sentido lo correcto estrictamente sería decir “p implica q”. **Luego en la expresión “si p, entonces q”, se dice que si se da el hecho enunciado por el antecedente, entonces se dará el hecho enunciado por el consecuente. Y si “p implica q” se dice que la verdad del antecedente implica la verdad del consecuente.**
Condicional e implicación son nociones situadas en niveles distintos del lenguaje. Hay sin embargo entre condicional e implicación una relación que se expresa así: **cuando un condicional es lógicamente verdadero se puede decir que su antecedente implica su consecuente.**
Los teoremas expresados en la matemática vienen dados en forma de implicaciones.

Si se tiene “si y sólo si p, entonces q”, se está usando el lenguaje para decir que lo enunciado por p es condición suficiente y necesaria de lo enunciado por q.
Y si “p es equivalente a q” se está utilizando el **metalenguaje** para expresar una relación entre nombres de enunciados (reducidos a sus valores de verdad), y no entre los enunciados mismos. En este sentido, lo correcto estrictamente sería decir “p es equivalente a q”.
Entonces “si y sólo si p, entonces q” quiere decir que sólo en el caso de que se dé lo enunciado por el antecedente se dará lo enunciado por el consecuente.
Y si “p es equivalente a q” se dice que los valores de verdad del antecedente son en todos los casos los mismos que los del consecuente.
Bicondicional y equivalencia son nociones situadas en niveles distintos de lenguaje. Hay sin embargo entre bicondicional y equivalencia una relación que se expresa así: **Cuando un bicondicional es lógicamente verdadero, se puede decir que su antecedente equivale a su consecuente.**

Ejemplo:
Probar si:

A) $[(p\to q)\wedge \sim q] \overset{?}{\Rightarrow} \sim p$

B) $p\leftrightarrow q \overset{?}{\equiv} (p\to q)\wedge(q\to p)$

C) $[(p\to q)\wedge q] \Rightarrow p$

D) $p\to(p\vee q) \equiv (p\to p)\vee(p\to q)$

Solución:

A) Para probar $[(p\to q)\wedge \sim q] \overset{?}{\Rightarrow} \sim p$ se procede así:

$[(p\to q)\wedge\sim q]\to\sim p \overset{?}{\equiv} V$ Definición de implicación lógica

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$P\rightarrow q$	$[(p\rightarrow q)\wedge\sim q]$	$[(p\rightarrow q)\wedge\sim q]\rightarrow\sim p$
V	V	F	F	V	F	V
V	F	F	V	F	F	V
F	V	V	F	V	F	V
F	F	V	V	V	V	V

Por lo tanto $[(p\rightarrow q)\wedge\sim q]\Rightarrow \sim p$

B) $p \leftrightarrow q \equiv (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$

Se prueba que:

$(p \leftrightarrow q) \leftrightarrow [(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)] \equiv V$

p	q	$p\leftrightarrow q$	$p\rightarrow q$	$q\rightarrow p$	$(p\rightarrow q)\wedge(q\rightarrow p)$	$(p\leftrightarrow q)\leftrightarrow[(p\rightarrow q)\wedge(q\rightarrow p)]$
V	V	V	V	V	V	V
V	F	F	F	V	F	V
F	V	F	V	F	F	V
F	F	V	V	V	V	V

Por lo tanto

$$p \leftrightarrow q \equiv (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$$

¿Qué pasa con los ejemplos C y D?
¿Cómo se simboliza lo que ocurre?

1.5 ALGEBRA DE PROPOSICIONES

Por medio de la equivalencia lógica se establecen proposiciones que son lógicamente equivalentes y que permiten reemplazar ciertas proposiciones por otras más sencillas para demostrar que un polinomio booleano es lógicamente equivalente a otro o para simplificar estructuras.

El álgebra de proposiciones se fundamenta en:
Definiciones: implicación lógica, equivalencia lógica, condicional, bicondicional, tautología y contradicción.
Postulados: OBI, conmutatividad, identidad, complemento y distributividad.
Teoremas: idempotencia, tautología y contradicción, doble negación, asociatividad y de De Morgan.

1.5.1 Postulados básicos:

Sean P, Q, R, S, T polinomios booleanos

1. Conmutatividad:
   a) $P \vee Q \equiv Q \vee P$
   b) $P \wedge Q \equiv Q \wedge P$
2. Identidad:
   a) $P \vee F \equiv F \vee P \equiv P$ V: Tautología
   b) $P \wedge V \equiv V \wedge P \equiv P$ F: Contradicción
   F neutro para v
   V neutro para $\wedge$
3. Complemento:
   a) $P \vee \sim P \equiv V$ (Postulado del tercer excluido)
   b) $P \wedge \sim P \equiv F$ (Postulado de contradicción)
4. Distributividad:
   a) $P \vee (Q \wedge R) \equiv (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$
   b) $P \wedge (Q \vee R) \equiv (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$

Con estos postulados podemos demostrar teoremas como los que siguen:

1. Teorema de idempotencia
   a) $P \vee P \equiv P$
   Partiendo del lado izquierdo se tiene:

$P \vee P \equiv (P \vee P) \wedge V$	Postulado de identidad
$\equiv (P \vee P) \wedge (P \vee \sim P)$	Postulado del tercer excluido
$\equiv P \vee (P \wedge \sim P)$	Postulado de la distributividad
$\equiv P \vee F$	Postulado de la contradicción
$\equiv P$	Postulado de la identidad

   b) $P \wedge P \equiv P$
   Partiendo del lado izquierdo se tiene:

$P \wedge P \equiv (P \wedge P) \vee F$	Postulado de identidad
$\equiv (P \wedge P) \vee (P \wedge \sim P)$	Postulado de la contradicción
$\equiv P \wedge (P \vee \sim P)$	Postulado de la distributividad
$\equiv P \wedge V$	Postulado del tercer excluido
$\equiv P$	Postulado de identidad

2. Teorema de la tautología y de la contradicción.
   a) $P \vee V \equiv V$
   Partiendo del lado izquierdo se tiene:

$P \vee V \equiv V \wedge (P \vee V)$	Postulado de identidad
$\equiv (P \vee \sim P) \wedge (P \vee V)$	Postulado del tercer excluido
$\equiv P \vee (\sim P \wedge V)$	Postulado de la distributividad
$\equiv P \vee \sim P$	Postulado de identidad
$\equiv V$	Postulado del tercer excluido

b) $P \wedge F \equiv F$ (Es el dual de a)

Partiendo del lado izquierdo se tiene:

$P \wedge F \equiv F \vee (P \wedge F)$	Postulado de identidad
$\equiv (P \wedge \sim P) \vee (P \wedge F)$	Postulado de la contradicción
$\equiv P \wedge (\sim P \vee F)$	Postulado de la distributividad
$\equiv P \wedge \sim P$	Postulado de identidad
$\equiv F$	Postulado de la contradicción

3. Teorema de la doble negación

$\sim (\sim P) \equiv P$

$\sim P \vee \sim (\sim P) \equiv V$ y $\sim P \vee P \equiv V$ Postulado del tercer excluido

Aplicando la reflexividad y transitividad de la equivalencia lógica, se tiene:

$\sim P \vee \sim (\sim P) \equiv \sim P \vee P$

Como $\sim P$ y $\sim (\sim P)$ son únicos, entonces $\sim (\sim P) \equiv P$

También se puede:

Si

i.	$P \equiv F$	entonces:
ii.	$\sim P \equiv V$	Definición de tautología
iii.	$\sim (\sim P) \equiv F$	Definición de contradicción

De i y iii $P \equiv \sim (\sim P)$

O si

i.	$P \equiv V$	entonces:
ii.	$\sim P \equiv F$	Definición de contradicción
iii.	$\sim (\sim P) \equiv V$	Definición de tautología

De i y iii $P \equiv \sim (\sim P)$

4. Teorema de la asociatividad

a). $P \vee (Q \vee R) \equiv (P \vee Q) \vee R$

Si $P \equiv F$ se tiene:

$P \vee (Q \vee R) \equiv F \vee (Q \vee R)$,	ya que $P \equiv F$
$\equiv Q \vee R$	Postulado de identidad
$\equiv (F \vee Q) \vee R$	Postulado de identidad
$\equiv (P \vee Q) \vee R$,	ya que $P \equiv F$

Si $P \equiv V$ se tiene:

$P \vee (Q \vee R) \equiv V \vee (Q \vee R)$,	ya que $P \equiv V$
$\equiv V$	Teorema de la tautología
$\equiv V \vee R$	Teorema de la tautología
$\equiv (V \vee Q) \vee R$	Teorema de la tautología
$\equiv (P \vee Q) \vee R$,	ya que $P \equiv V$

b). $P \wedge (Q \wedge R) \equiv (P \wedge Q) \wedge R$ (Dual de a)

Si $P \equiv F$ se tiene:

$P \wedge (Q \wedge R) \equiv F \wedge (Q \wedge R)$,	ya que $P \equiv F$
$\equiv F$	Teorema de la contradicción
$\equiv F \wedge R$	Teorema de la contradicción
$\equiv (F \wedge Q) \wedge R$	Teorema de la contradicción
$\equiv (P \wedge Q) \wedge R$,	ya que $P \equiv F$

O si $P \equiv V$ se tiene:

$P \wedge (Q \wedge R) \equiv V \wedge (Q \wedge R)$,	ya que $P \equiv V$
$\equiv Q \wedge R$	Postulado de identidad
$\equiv (V \wedge Q) \wedge R$	Postulado de identidad
$\equiv (P \wedge Q) \wedge R$,	ya que $P \equiv V$

5. Teorema de De Morgan

a). $\sim (P \vee Q) \equiv \sim P \wedge \sim Q$

Si $P \equiv F$

$\sim (P \vee Q) \equiv \sim (F \vee Q)$,	ya que $P \equiv F$
$\equiv \sim Q$	Postulado de identidad
$\equiv V \wedge \sim Q$	Postulado de identidad
$\equiv \sim F \wedge \sim Q$	Definición de tautología
$\equiv \sim P \wedge \sim Q$,	ya que $P \equiv F$

Si $P \equiv V$

$\sim (P \vee Q) \equiv \sim (V \vee Q)$,	ya que $P \equiv V$
$\equiv \sim V$	Teorema de la tautología
$\equiv F$	Definición de contradicción
$\equiv F \wedge \sim Q$	Teorema de la contradicción
$\equiv \sim V \wedge \sim Q$	Definición de contradicción
$\equiv \sim P \wedge \sim Q$,	ya que $P \equiv V$

b). $\sim (P \wedge Q) \equiv \sim P \vee \sim Q$ (Dual de a)

Si $P \equiv F$

$\sim (P \wedge Q) \equiv \sim (F \wedge Q)$,	ya que $P \equiv F$
$\equiv \sim F$	Teorema de la contradicción
$\equiv V$	Definición de tautología
$\equiv V \vee \sim Q$	Teorema de la tautología
$\equiv \sim F \vee \sim Q$	Definición de tautología
$\equiv \sim P \vee \sim Q$,	ya que $P \equiv F$

Si $P \equiv V$

$\sim (P \wedge Q) \equiv \sim (V \wedge Q)$,	ya que $P \equiv V$
$\equiv \sim Q$	Postulado de identidad
$\equiv F \vee \sim Q$	Postulado de identidad
$\equiv \sim V \vee \sim Q$	Definición de contradicción

$\equiv \sim P \vee \sim Q$, ya que $P \equiv V$

1.5.2 Postulados:

1. Conmutatividad:
   a). $P \vee Q \equiv Q \vee P$
   b). $P \wedge Q \equiv Q \wedge P$

2. Identidad:
   a). $P \vee F \equiv F \vee P \equiv P$
   b). $P \wedge V \equiv V \wedge P \equiv P$

   V: Tautología, F: Contradicción
   F: neutro para v, V: neutro para $\wedge$

3. Complemento:
   a). $P \vee \sim P \equiv V$ (Postulado del tercer excluido)
   b). $P \wedge \sim P \equiv F$ (Postulado de contradicción)

4. Distributividad:
   a). $P \vee (Q \wedge R) \equiv (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$
   b). $P \wedge (Q \vee R) \equiv (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$

1.5.3 Teoremas básicos:

1. Teorema de la idempotencia
   a). $P \vee P \equiv P$
   b). $P \wedge P \equiv P$
2. Teorema de la tautología y de la contradicción
   a). $P \vee V \equiv V$
   b). $P \wedge F \equiv F$
3. Teorema de la doble negación
   $\sim(\sim P) \equiv P$
4. Teorema de la asociatividad
   a). $P \vee (Q \vee R) \equiv (P \vee Q) \vee R$
   b). $P \wedge (Q \wedge R) \equiv (P \wedge Q) \wedge R$
5. Teorema de De Morgan
   a). $\sim (P \vee Q) \equiv \sim P \wedge \sim Q$
   b). $\sim (P \wedge Q) \equiv \sim P \vee \sim Q$

De las definiciones dadas anteriormente es importante que tengamos presente:

1. $P \rightarrow Q \equiv \sim P \vee Q$	Definición de condicional
2. $P \leftrightarrow Q \equiv (P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow P)$	Definición de bicondicional
3. $P \Rightarrow Q$ es equivalente a $P \rightarrow Q \equiv V$	Definición de implicación lógica
4. $P \Leftrightarrow Q$ es equivalente a $(P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P)$	Definición de equivalencia lógica

5. $\sim F \equiv V$ Definición de tautología
$\sim V \equiv F$ Definición de contradicción

1.6 EJERCICIOS RESUELTOS

I. Demostrar que:

1. $p \vee (p \wedge q) \equiv p$ (Teorema de absorción)

Demostración:

$p \vee (p \wedge q) \equiv (p \wedge V) \vee (p \wedge q)$	Postulado de identidad
$\equiv p \wedge (V \vee q)$	Postulado de la distributividad
$\equiv p \wedge V$	Teorema de la tautología
$\equiv p$	Postulado de identidad.

2. $(p \wedge q \wedge r) \vee (p \wedge q \wedge \sim r) \vee (p \wedge r \wedge \sim q) \vee (\sim p \wedge \sim q \wedge r) \equiv (p \wedge q) \vee (r \wedge \sim q)$

Demostración:
$[(p \wedge q \wedge r) \vee (p \wedge q \wedge \sim r)] \vee [(p \wedge r \wedge \sim q) \vee (\sim p \wedge \sim q \wedge r)] \equiv$
Teorema de la asociatividad
$[(p \wedge q) \wedge (r \vee \sim r)] \vee [(p \vee \sim p) \wedge (r \wedge \sim q)] \equiv$
Postulado de la distributividad. Postulado de la conmutatividad
$[(p \wedge q) \wedge V] \vee [V \wedge (r \wedge \sim q)] \equiv$ Postulado del tercer excluido
$(p \wedge q) \vee (r \wedge \sim q) \equiv$ Postulado de identidad

3. $(p \wedge q) \Rightarrow p$

Demostración:

$(p \wedge q) \rightarrow p \overset{?}{\equiv} V$	Definición de implicación lógica
$\sim(p \wedge q) \vee p \equiv$	Definición de condicional
$\sim p \vee \sim q \vee p \equiv$	Teorema de De Morgan
$(\sim p \vee p) \vee \sim q \equiv$	Postulado de la conmutatividad y Teorema de la asociatividad
$V \vee \sim q \equiv$	Postulado del tercer excluido
$V \equiv$	Teorema de la tautología

Por lo tanto $(p \wedge q) \rightarrow p \equiv V$

4. $q \Rightarrow (p \rightarrow q)$

Demostración:

$q \rightarrow (p \rightarrow q) \overset{?}{\equiv} V$	Definición de implicación lógica
$\sim q \vee (\sim p \vee q) \equiv$	Definición de condicional
$(\sim q \vee q) \vee \sim p \equiv$	Postulado de la conmutatividad y Teorema de la asociatividad
$V \vee \sim p \equiv$	Postulado del tercer excluido
$V \equiv$	Teorema de la tautología

Por lo tanto $q \Rightarrow (p \rightarrow q)$

5. $[(p \rightarrow q) \wedge p] \Rightarrow q$

Demostración:

$[(p \rightarrow q) \wedge p] \rightarrow q \overset{?}{\equiv} V$	Definición de implicación lógica
$\sim[(\sim p \vee q) \wedge p] \vee q \equiv$	Definición del condicional
$[\sim(\sim p \vee q) \vee \sim p] \vee q \equiv$	Teorema de De Morgan
$\sim(\sim p \vee q) \vee (\sim p \vee q) \equiv$	Teorema de la asociatividad
$V \equiv$	Postulado del tercer excluido

Por lo tanto $[(p \rightarrow q) \wedge p] \Rightarrow q$

6. $[(p \vee q) \wedge (p \rightarrow s) \wedge (q \rightarrow r)] \Rightarrow (s \vee r)$

Demostración:

$[(p \vee q) \wedge (p \rightarrow s) \wedge (q \rightarrow r)] \rightarrow (s \vee r) \overset{?}{\equiv} V$	Definición de implicación lógica
$\sim[(p \vee q) \wedge (\sim p \vee s) \wedge (\sim q \vee r)] \vee (s \vee r) \equiv$	Definición de condicional
$[\sim(p \vee q) \vee \sim(\sim p \vee s) \vee \sim(\sim q \vee r)] \vee (s \vee r) \equiv$	Teorema de De Morgan
$[\sim(p \vee q) \vee (p \wedge \sim s) \vee (q \wedge \sim r)] \vee (s \vee r) \equiv$	Teorema de De Morgan y Teorema de la doble negación
$\sim(p \vee q) \vee [(p \wedge \sim s) \vee s] \vee [(q \wedge \sim r) \vee r] \equiv$	Postulado de la conmutatividad y teorema de la asociatividad
$\sim(p \vee q) \vee [(p \vee s) \wedge (\sim s \vee s)] \vee [(q \vee r) \wedge (\sim r \vee r)] \equiv$	Postulado de la distributividad
$\sim(p \vee q) \vee [(p \vee s) \wedge V] \vee [(q \vee r) \wedge V] \equiv$	Postulado del tercer excluido
$\sim(p \vee q) \vee (p \vee s) \vee (q \vee r) \equiv$	Postulado de identidad
$[\sim(p \vee q) \vee (p \vee q)] \vee (s \vee r) \equiv$	Postulado de la conmutatividad y teorema de la asociatividad
$V \vee (s \vee r) \equiv$	Postulado del tercer excluido
$V \equiv$	Teorema de la tautología

Por lo tanto $[(p \vee q) \wedge (p \rightarrow s) \wedge (q \rightarrow r)] \Rightarrow (s \vee r)$

7. $p \rightarrow \sim q \equiv q \rightarrow \sim p$

Demostración:

$\sim p \vee \sim q \equiv$	Definición del Condicional
$\sim q \vee \sim p \equiv$	Postulado de la Conmutatividad
$q \rightarrow \sim p \equiv$	Definición del Condicional

8. $(p \wedge q) \rightarrow r \equiv (p \rightarrow r) \vee (q \rightarrow r)$

Demostración:

$(p \rightarrow r) \vee (q \rightarrow r) \equiv$	
$(\sim p \vee r) \vee (\sim q \vee r) \equiv$	Definición del Condicional
$(\sim p \vee \sim q) \vee (r \vee r) \equiv$	Postulado de la Conmutatividad y Teorema de la asociatividad
$(\sim p \vee \sim q) \vee r \equiv$	Teorema de la idempotencia
$\sim(p \wedge q) \vee r \equiv$	Teorema de De Morgan
$(p \wedge q) \rightarrow r \equiv$	Definición del condicional

9. $(p \wedge \sim r) \vee (p \wedge q \wedge r) \vee (p \wedge r) \equiv p$

Demostración:

$p \wedge [\sim r \text{ v } (q \wedge r) \text{ v } r] \equiv$	Postulado de la distributividad
$p \wedge [(q \wedge r) \text{ v } (\sim r \text{ v } r)] \equiv$	Postulado de la conmutatividad y Teorema de asociatividad
$p \wedge [(q \wedge r) \text{ v } V] \equiv$	Postulado del tercer excluido
$p \wedge V \equiv$	Teorema de la tautología
$p \equiv$	Teorema de la identidad

II. Analizar si cada uno de los siguientes polinomios booleanos son T, C ó I.

1). $[(p \wedge q) \text{ v } (p \wedge r) \text{ v } (p \wedge s)] \text{ v } [\sim(p \wedge q) \wedge \sim(p \wedge r) \wedge \sim(p \wedge s)]$

$[(p \wedge q) \text{ v } (p \wedge r) \text{ v } (p \wedge s)] \text{ v} \sim [(p \wedge q) \vee (p \wedge r) \vee (p \wedge s)] \equiv$ Teorema de De Morgan.

$V \equiv$ Postulado del tercer excluido

Por lo tanto es una tautología

2). $[(x \wedge y) \rightarrow x] \rightarrow [(y \text{ v } z) \wedge (\sim y \wedge \sim z)]$

$\sim[\sim(x \wedge y) \text{ v } x] \text{ v } [(y \text{ v } z) \wedge (\sim y \wedge \sim z)] \equiv$	Definición del condicional
$\sim[(\sim x \text{ v } \sim y) \text{ v } x] \text{ v } [(y \text{ v } z) \wedge \sim (y \text{ v } z)] \equiv$	Teorema de De Morgan
$\sim[(\sim x \text{ v } \sim y) \text{ v } x] \text{ v } F \equiv$	Postulado de la contradicción
$\sim[(\sim x \text{ v } x) \text{ v } \sim y] \text{ v } F \equiv$	Postulado de la conmutatividad y teorema de la asociatividad
$\sim[(\sim x \text{ v } x) \text{ v } \sim y] \equiv$	Postulado de la identidad
$\sim[V \text{ v } \sim y] \equiv$	Postulado del tercer excluido
$\sim V \equiv$	Teorema de la tautología
$F \equiv$	Definición de contradicción

Por lo tanto es una contradicción.

3). $[(p \wedge q) \rightarrow r] \rightarrow (p \vee r)$

$\sim[\sim(p \wedge q) \vee r] \vee (p \vee r) \equiv$	Definición de condicional
$[\sim\sim(p \wedge q) \wedge \sim r] \vee (p \vee r) \equiv$	Teorema de De Morgan
$[(p \wedge q) \wedge \sim r] \vee (p \vee r) \equiv$	Teorema de la doble negación
$\{[(p \wedge q) \wedge \sim r] \vee r\} \vee p \equiv$	Postulado de la conmutatividad y Teorema de la asociatividad
$\{[(p \wedge q) \vee r] \wedge(\sim r \vee r)\} \vee p \equiv$	Postulado de la distributividad
$\{[(p \wedge q) \vee r] \wedge V\}\vee p \equiv$	Postulado del tercer excluido
$[(p \wedge q) \vee r] \vee p \equiv$	Postulado de la identidad

No hay forma de seguir simplificando, por lo tanto es una indeterminación.

III). Simplificar

1) $(p \wedge q) \vee (p \wedge \sim q) \vee (\sim p \wedge \sim q)$

$[(p \wedge q) \vee (p \wedge \sim q)] \vee (\sim p \wedge \sim q) \equiv$	Teorema de la asociatividad
$[p \wedge (q \vee \sim q)] \vee (\sim p \wedge \sim q) \equiv$	Postulado de la distributividad
$(p \wedge V) \vee (\sim p \wedge \sim q) \equiv$	Postulado del tercer excluido
$p \vee (\sim p \wedge \sim q) \equiv$	Postulado de identidad
$(p \vee \sim p) \wedge (p \vee \sim q) \equiv$	Postulado de la distributividad
$V \wedge (p \vee \sim q) \equiv$	Postulado del tercer excluido
$p \vee \sim q \equiv$	Postulado de identidad

2) $\sim(p \vee q) \vee (\sim p \wedge q)$

$(\sim p \wedge \sim q) \vee (\sim p \wedge q) \equiv$	Teorema de De Morgan
$\sim p \wedge (\sim q \vee q) \equiv$	Postulado de la distributividad
$\sim p \wedge V \equiv$	Postulado del tercer excluido
$\sim p \equiv$	Postulado de identidad

3) $\{[(p \rightarrow q) \wedge \sim q] \rightarrow \sim p\} \wedge \sim(p \vee q)$

$\{\sim[(\sim p \vee q) \wedge \sim q] \vee \sim p\} \wedge \sim(p \vee q) \equiv$	Definición del condicional.
$\{[\sim(\sim p \vee q) \vee \sim\sim q] \vee \sim p\} \wedge \sim(p \vee q) \equiv$	Teorema de De Morgan
$\{[\sim(\sim p \vee q) \vee q] \vee \sim p\} \wedge \sim(p \vee q) \equiv$	Teorema de la doble negación
$\{\sim(\sim p \vee q) \vee (\sim p \vee q)\} \wedge \sim(p \vee q) \equiv$	Postulado de la conmutatividad y teorema de la asociatividad
$V \wedge \sim(p \vee q) \equiv$	Postulado del tercer excluido
$\sim(p \vee q) \equiv$	Postulado de identidad

1.7 EJERCICIOS PROPUESTOS

I) Demostrar:

1) $p \wedge (p \vee q) \equiv p$
2) $(p \wedge q) \Rightarrow q$
3) $p \Rightarrow (p \vee q)$
4) $[p \rightarrow (q \wedge r)] \Rightarrow [(p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow r)]$
5) $[p \rightarrow (q \vee r)] \Rightarrow [(p \rightarrow q) \vee (p \rightarrow r)]$
6) $[(p \wedge q) \rightarrow r] \Rightarrow [p \rightarrow (q \rightarrow r)]$
7) $[(p \vee q) \wedge (p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r)] \Rightarrow r$
8) $[(\sim p \vee \sim q) \wedge (r \rightarrow p) \wedge (s \rightarrow q)] \Rightarrow (\sim r \vee \sim s)$
9) $[(p \vee q) \wedge \sim p] \Rightarrow q$
10) $[(p \vee q) \wedge \sim q] \Rightarrow p$
11) $[(p \rightarrow q) \wedge \sim q] \Rightarrow \sim p$
12) $[(\sim q \rightarrow \sim p) \wedge (\sim r \rightarrow \sim q)] \Rightarrow \sim(p \wedge \sim r)$

II) Analizar si cada uno de los siguientes polinomios booleanos son T, C, o I.

1) $[x \wedge (y \vee z)] \vee [\sim x \vee \sim(y \vee z)]$

2) $[p \to (q \to r)] \leftrightarrow [(p \wedge q) \to r]$
3) $[(p \wedge q) \vee (p \wedge r) \vee (p \wedge s)] \vee [\sim(p \wedge s) \wedge \sim(p \wedge r) \wedge \sim(p \wedge q)]$
4) $\sim\{[(p \to q) \wedge (p \to \sim q)] \to \sim p\}$

1.8 CUANTIFICADORES

Sean los siguientes enunciados:
Carlos es alumno de Ingeniería Mecánica.
Juliana es alumna de Ingeniería Mecánica.

En ambos enunciados hay algo que cambia (variable: Carlos, Juliana) y algo que no cambia, lo que se dice de cada uno (constante).

En forma genérica se puede decir: "x es alumno de Ingeniería Mecánica". Este enunciado no es ni verdadero ni falso (indeterminado).

x es una variable que se mueve en un conjunto de referencia.

Enunciados de este estilo se definen como "**funciones proposicionales**" o expresiones abiertas.

Cuando en una función proposicional se cambia la indeterminada x por un valor determinado de un conjunto de referencia (Dominio de la variable), se obtiene una proposición.

Una función proposicional es una expresión de la forma "x es Q" donde x es una variable individual (sujeto) y Q es una variable de predicado.

OBSERVACIONES:

1. Sólo se estudiará funciones proposicionales que tengan variable el sujeto (o individuo de quien se habla).
2. Una función proposicional se representa, según las variables del sujeto, así:

   $Q^1(x_1)$, $Q^2(x_1,x_2)$, $Q^3(x_1,x_2,x_3)$, ... $Q^n(x_1,x_2, ...x_n)$

3. Si se tiene como dato una función proposicional y un dominio se puede formar proposiciones (verdaderas o falsas) sustituyendo en la función proposicional las variables de individuo por elementos del dominio.
4. Con funciones proposicionales se puede formar nuevas funciones proposicionales mediante el empleo de conectivos (negación, conjunción, disyunción, condicional, bicondicional) o de relaciones entre proposiciones (implicación, equivalencia).

Ejemplos:

1. Sea Q(x): x^2 es mayor a 10 y sea A = {1, 2, 3, 4, 5}, conjunto de referencia.

Hallar los valores de x que satisfacen la función proposicional

Si $x = 1 \Rightarrow 1^2 > 10$, proposición falsa
Si $x = 2 \Rightarrow 2^2 > 10$, proposición falsa
Si $x = 3 \Rightarrow 3^2 > 10$, proposición falsa

Si x = 4 $\Rightarrow 4^2 > 10$, proposición verdadera
Si x = 5 $\Rightarrow 5^2 > 10$, proposición verdadera

2. Sea: $Q^1(x)$: x^2 es mayor a 10
$Q^2(x,y)$: $x > y+1$
A = {2, 3, 4}, conjunto de referencia

Se pueden construir funciones proposicionales, así:

A) $Q^1(x) \wedge \sim Q^2(x,y)$
B) $\sim Q^1(x) \vee Q^2(x,y)$
C) $Q^1(x) \wedge Q^2(x,y)$

Hallar el valor de verdad de:

A) $Q^1(3) \wedge \sim Q^2(3,4)$
B) $\sim Q^1(2) \wedge Q^2(2,3)$
C) $Q^1(4) \wedge Q^2(4,2)$

Entonces:

Para A) $9 > 10 \wedge 3 \not> 5$ (F)
B) $4 \not> 10 \wedge 2 > 4$ (F)
C) $16 > 10 \wedge 4 > 3$ (V)

Hay proposiciones sin sujeto específico, por ejemplo:

A) Todos los números naturales son números complejos.
B) Algunas integrales son definidas.
C) Todas las funciones son funciones exponenciales.
D) Existe un ingeniero mecánico que tiene treinta años de edad.

Si se toma un sujeto indeterminado (x), en cada uno de los enunciados, de tal forma que haga el recorrido por cada conjunto citado se tiene:

A) Para todo x, si x es un número natural entonces es número complejo.
B) Existe un x, tal que x es una integral y x es definida.
C) Para cualquier x, si x es función entonces es función exponencial.
D) Existe al menos un x, tal que x es ingeniero mecánico y x tiene treinta años.

Expresiones como:
A) Para todos, todos los x, cualquier x, para cualquier x, cada x, o expresiones equivalentes se simbolizan mediante:

($\forall$x): llamado **Cuantificador universal**.

B) Para algún x, hay un x, existe un x, algún x, algunos x (o expresiones equivalentes), se simbolizan mediante:

($\exists$x): llamado **Cuantificador existencial**.

Si a una función proposicional , x es P, se le antepone un cuantificador se convierte en una proposición.

Ejemplo: $(\forall x)\ [Q(x)]$: para todo x, x es Q
$(\exists x)\ [T(x)]$: existe un x, tal que x es T

y se dice que x es una **variable ligada**.

Los ejemplos citados quedarían así:
A) $(\forall x)\ [N(x) \rightarrow C(x)]$
B) $(\exists x)\ [I(x) \wedge D(x)]$
C) $(\forall x)\ [F(x) \rightarrow E(x)]$
D) $(\exists x)\ [M(x) \wedge T(x)]$

Existen tres formas de transformar una función proposicional Q(x) en una proposición, y son:

1.Cambiando la indeterminada x por un valor específico de un conjunto de referencia.
2. Anteponiéndole a la función proposicional el cuantificador universal.
3. Anteponiéndole a la función proposicional el cuantificador existencial.

OBSERVACIONES:
1. Al anteponer a la función proposicional Q(x) un cuantificador entonces la variable x pasa a ser una **variable ligada**.
2. a) $(\forall x)\ [Q(x)]$: es verdadera cuando todas las sustituciones de la variable x, por términos específicos del conjunto de referencia , convierten a Q(x) en un enunciado verdadero.
   b) $(\exists x)\ [Q(x)]$: es verdadero cuando al menos un caso de la sustitución de la variable x, por un termino particular del conjunto de referencia, convierte a Q(x) en un enunciado verdadero.

Expresiones como:	se simbolizan:
Toda P es Q	$(\forall x)\ [P(x) \rightarrow Q(x)]$
Toda P es no Q	$(\forall x)\ [P(x) \rightarrow \sim Q(x)]$
Algún P es Q	$(\exists x)\ [P(x) \wedge Q(x)]$
Algún P no es Q	$(\exists x)\ [P(x) \wedge \sim Q(x)]$

A continuación se citan unos teoremas que unidos a las definiciones, postulados y teoremas del álgebra de proposiciones fundamentan la lógica formal.
Sean R y Q expresiones cuantificadas.

A. Negación de expresiones cuantificadas.
1) $\sim(\exists x)\ [Q(x)] \equiv (\forall x)\ [\sim Q(x)]$
La negación de una proposición existencial equivale a la afirmación de un cuantificador universal cuya función proposicional ha sido negada.

2) $\sim(\forall x)\ [Q(x)] \equiv (\exists x)\ [\sim Q(x)]$

La negación de una proposición universal equivale a la afirmación de un cuantificador existencial cuya función proposicional ha sido negada.

B. Definición de cuantificadores:
1) $(\forall x)\ [R(x)] \equiv \sim(\exists x)\ [\sim R(x)]$
2) $(\exists x)\ [R(x)] \equiv \sim(\forall x)\ [\sim R(x)]$

1.9 EJERCICIOS RESUELTOS

1. Dado el enunciado: “Si todos los números son reales entonces son números enteros”:

A) Hallar su valor de verdad
B) Representarlo lógicamente
C) Negar la representación dada en B
D) Volver al lenguaje usual

Solución:

A) El enunciado es falso ya que en los reales existen números que no son enteros, por ejemplo Q* (irracionales) o algunos Q.

B) $R(x)$: x es un número real
$Z(x)$: x es un número entero
$(\forall x)\ [R(x) \rightarrow Z(x)]$

C) $\sim (\forall x)\ [R(x) \rightarrow Z(x)]$
$\equiv (\exists x) \sim [R(x) \rightarrow Z(x)]$ Teorema de negación de cuantificadores
$\equiv (\exists x) \sim [\sim R(x) \vee Z(x)]$ Definición del condicional
$\equiv (\exists x)\ [R(x) \wedge \sim Z(x)]$ Teorema de D’Morgan
Teorema de la doble negación

D) Existe un x que es real y no es entero, es decir, algunos números reales no son números enteros.

2. Analizar si el siguiente enunciado responde a una tautología, contradicción o indeterminación:

$\sim (\exists x)\ \{[(H(x) \wedge M(x)) \rightarrow N(x)] \rightarrow [H(x) \rightarrow (M(x) \rightarrow N(x))]\}$

Solución:

$\sim (\exists x)\ \{\sim[\sim(H(x) \wedge M(x))\vee N(x)] \vee [\sim H(x) \vee (\sim M(x) \vee N(x))]\} \equiv$ Definición del condicional

$(\forall x) \sim \{\sim[\sim(H(x) \wedge M(x))\vee N(x)] \vee [(\sim H(x) \vee \sim M(x)) \vee N(x)]\} \equiv$ Teorema negación de cuantificadores, teorema de la asociatividad

$(\forall x) \sim \{\sim[\sim (H(x) \wedge M(x))\vee N(x)] \vee [\sim (H(x) \wedge M(x)) \vee N(x)]\} \equiv$ Teorema de D'Morgan

$(\forall x) \sim \{x \text{ es } V\} \equiv$ Postulado del tercer excluido

$(\forall x)\ x \text{ es } F \equiv$ Definición de contradicción

Por lo tanto la proposición dada es una contradicción.

3. Negar y simplificar el siguiente polinomio:

$(\forall x)\ \{[\sim (H(x) \vee P(x)) \rightarrow R(x)] \wedge \sim R(x)\}$

Solución:

$\sim (\forall x)\ \{[\sim (H(x) \vee P(x)) \rightarrow R(x)] \wedge \sim R(x)\}$

$(\exists x) \sim \{[\sim (H(x) \vee P(x)) \rightarrow R(x)] \wedge \sim R(x)\} \equiv$ Teorema negación de cuantificadores

$(\exists x)\ \{\sim [\sim (H(x) \vee P(x)) \rightarrow R(x)] \vee R(x)\} \equiv$ Teorema de D'Morgan y teorema de la doble negación

$(\exists x)\ \{\sim [(H(x) \vee P(x)) \vee R(x)] \vee R(x)\} \equiv$ Definición del condicional

$(\exists x)\ \{[(\sim H(x) \wedge \sim P(x)) \wedge \sim R(x)] \vee R(x)\} \equiv$ Teorema de D'Morgan

$(\exists x)\ \{[((\sim H(x) \wedge \sim P(x)) \vee R(x)] \wedge [\sim R(x) \vee R(x)\} \equiv$ Postulado de la distributividad

$(\exists x)\ \{[(\sim H(x) \wedge \sim P(x)] \vee R(x)\} \equiv$ Postulado del tercer excluido Postulado de la identidad

1.10 EJERCICIOS PROPUESTOS

I. Dados los siguientes enunciados:
A) Hallar su valor de verdad
B) Representarlos lógicamente
C) Negar la representación dada en B
D) Volver al lenguaje usual.

1. Algunos números complejos son números primos.
2. Todos los límites de funciones existen.
3. Para todo triángulo se cumple que es equilátero.
4. Algunos ingenieros son ingenieros en informática.
5. Todos los operadores son unitarios.

II. Analizar si las siguientes proposiciones son tautologías, contradicciones o indeterminaciones:

1. $\sim (\exists x) \sim \{[(P(x) \rightarrow Q(x)) \wedge P(x)] \rightarrow Q(x)\}$
2. $(\forall x) \sim \{[(P(x) \rightarrow Q(x)) \wedge (Q(x) \rightarrow R(x))] \rightarrow [P(x) \rightarrow R(x)]\}$
3. $(\forall x) \sim \{[(P(x) \vee R(x)) \wedge (R(x) \vee \sim P(x))] \wedge P(x)\}$
4. $(\forall x) \{[(P(x) \rightarrow Q(x)) \wedge \sim Q(x)] \rightarrow P(x)\}$
5. $\sim(\forall x) \{[(P(x) \rightarrow Q(x)) \wedge P(x)] \rightarrow Q(x)\}$
6. $\sim(\exists x) \{[(H(x) \wedge M(x)) \rightarrow N(x)] \rightarrow [H(x) \rightarrow (M(x) \rightarrow N(x))]\}$
7. $(\forall x) \{[P(x) \rightarrow (Q(x) \vee R(x))] \rightarrow [(P(x) \rightarrow Q(x)) \vee (P(x) \rightarrow R(x))]\}$

III. Demostrar que:

1. $(\forall x) \{ (P(x) \wedge Q(x)) \vee (P(x) \wedge \sim Q(x)) \vee (\sim P(x) \wedge \sim Q(x))\} \equiv (\forall x) [P(x) \vee \sim Q(x)]$
2. $(\forall x) \{ (P(x) \wedge \sim R(x)) \vee (P(x) \wedge Q(x) \wedge R(x)) \vee (P(x) \wedge R(x))\} \equiv (\forall x) [P(x)]$

IV. Negar los siguientes enunciados:

1. $(\exists x) (\forall y), P(x, y)$
2. $(\forall x) (\forall y), P(x, y)$
3. $(\exists y) (\exists x) (\forall z), P(x, y, z)$
4. $(\forall x) (\exists y), (P(x) \vee Q(y))$
5. $(\exists x) (\forall y) [P(x, y) \rightarrow Q(x, y)]$
6. $(\exists y) (\exists x) (P(x) \wedge \sim Q(y))$
7. $(\forall x) (\forall y) (x > y \rightarrow x +1 > y)$
8. $\forall x, |x| = x$
9. $\exists x, x^2 = x$
10. $\forall x, x +1 > x$
11. $\exists x, x +2 = x$
12. $\exists x, |x| = 0$
13. $\forall x, p(x) \wedge \exists x\, q(x)$
14. $\exists y\, p(y) \rightarrow \forall x \sim q(x)$
15. $\exists x \sim p(x) \vee \forall x\, q(x)$