5ta OLIMPIADA CIENTIFICA ESTUDIANTIL PLURINACIONAL BOLIVIANA
30va OLIMPIADA BOLIVIANA DE MATEMATICA
2^{da} Etapa (Examen Simultáneo)
1^{ero} SECUNDARIA

PREGUNTAS DE OPCIÓN MÚLTIPLE (Encierre en un círculo la respuesta correcta).

1. (15pts) El número de la tarjeta de crédito tiene 14 dígitos y la suma de tres dígitos consecutivos cualesquiera da siempre 20. Cuánto vale x.

			9				x			7			

A)3 B) 8 C) 4 D) 5 E) 6

2. (15pts) Dividir el menor número de cuatro cifras diferentes entre el mayor número de dos cifras. Dar como respuesta el residuo obtenido.
A)5 B)7 C)9 D)2 E) 33

3. (15pts) Con 1 352 Bs he comprado igual número de libros de 24 Bs, de 32 Bs y de 48 Bs.
¿Cuántos libros se ha comprado en total?
A) 13 B) 26 C) 39 C) 42 E) 45

PREGUNTAS DE DESARROLLO (Resuelva en la misma hoja)

4. (20pts)¿Cuántos números de cuatro dígitos hay tales que la suma de los dígitos sea 4 y su Producto 0?
SOLUCION:

$$\overline{abcd}$$

$$\left.\begin{array}{l} 1030 \to son\ 3\ formas \\ 2200 \to son\ 3\ formas \\ 3100 \to son\ 3\ formas \\ 4000 \to una\ forma \\ 1120 \to son\ 6\ formas \to \\ 2110 \to son\ 3\ formas \end{array}\right\} \quad \left\{\begin{array}{l} ejemplo \\ 1120 \\ 1102 \\ 1201 \\ 1210 \\ 1021 \\ 1012 \end{array}\right.$$

$Respuesta\ : Hay\ 19\ formas$

Criterios de calificación.-

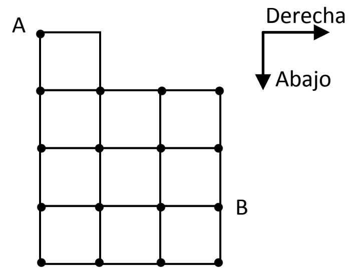
i). Visualiza al menos un grupo de permutaciones…(5 pts)
ii). Continua con la secuencia y completa con todas las permutaciones, obteniendo el resultado…(15 pts)
la sumatoria anterior da los 20 pts.Asignados a la pregunta

5. (20pts) Un calculista tendrá su primer hijo en el primer año que sea un cuadrado perfecto, para que de esta manera su hijo fallezca en un año que también sea un cuadrado perfecto. ¿Cuántos años vivirá el hijo del calculista? (Año actual 2015)
SOLUCION:
Sean X e Y números enteros y positivos
X^2 : año de nacimiento
Y^2: año de fallecimiento
Año actual 2015
Se considera:
$X^2 > 2015 \quad ; \quad Y^2 > 2015$
X^2 , Y^2 deben ser cuadrados perfectos más próximos a 2015
Entonces:
$X^2 = 45^2 = 2025$; $Y^2 = 46^2 = 2116$; Años que vivirá el hijo:
$Y^2 - X^2 = 2116 - 2025 = 91$; Entonces el hijo vivirá 91 años.

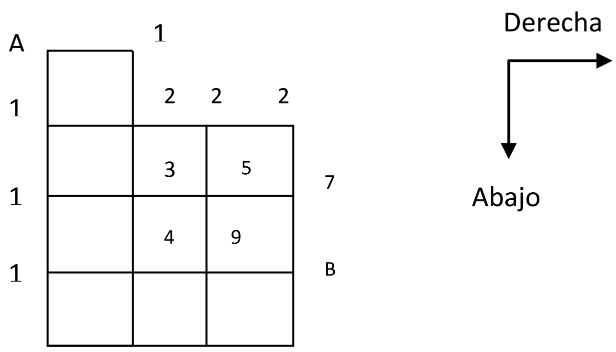
i). Advierte que los cuadrados de las edades deben ser mayores a 2015…..(5 pts)
ii). Aproxima los cuadrados de las edades, con el referente anterior: 45^2 y 46^2…..(10 pts)
iii). Completa la resolución, con la diferencia de los cuadrados, 2116 – 2025; el hijo vivirá 91 años. . . *(5 pts).*

La Sumatoria da los 20 pts. Asignados a la pregunta

6. (15pts) En la figura las líneas representan caminos. Si sólo se puede ir hacia la derecha o hacia abajo ¿De cuántas maneras diferentes se puede ir de A hasta B?



SOLUCION:
Utilizando el método enumerativo; se obtiene: 16 formas de ir de A a B.



i). Determina algunos tramos correctos al menos. . . (5 ptos)
ii). Determina todos los tramos del recorrido completos……(15 pts)
Los puntos anteriores no se suman son independientes

5ta OLIMPIADA CIENTIFICA ESTUDIANTIL PLURINACIONAL BOLIVIANA
30va OLIMPIADA BOLIVIANA DE MATEMATICA
2da Etapa (Examen Simultáneo)
2do SECUNDARIA

PREGUNTAS DE OPCIÓN MÚLTIPLE (Encierre en un círculo la respuesta correcta).

1. (15pts) Si se cumple que: $\overline{abc}\,.\,c = 344$ y (b > c > a).
Halle el valor de $\overline{ab} + \overline{bc} + \overline{ac}$
A) 21 B) 6 C) 100 D) 120 E) 101

2. (15pts) Durante la hibernación, un oso perdió los 2/7 de su peso. Es así que al despertar de la hibernación el oso peso 210 kilogramos. ¿Cuántos kilogramos perdió durante la hibernación?
A) 94 B) 84 C) 104 D) 105 E) 140

3. (15pts) De cinco números positivos y cuatro números negativos, se escogen tres números al azar y se multiplican Calcular el número de formas que se pueden multiplicar, de tal manera que el producto sea positivo.
A) 21 B) 22 C) 23 D) 31 E) 40

PREGUNTAS DE DESARROLLO (Resuelva en la misma hoja)

4. (20pts) Un obrero de una fábrica gasta diariamente las dos terceras partes del jornal en su alimentación; la quinta parte lo ahorra para pagar la mensualidad de su habitación; y el resto lo utiliza para gastos imprevistos. Si en un mes de 30 días, de los cuales no trabajó dos días por encontrarse enfermo, el monto de gastos imprevistos asciende a 180 Bs, los cuales los utilizó para pagar la receta del médico. ¿Cuál es el jornal del obrero?

SOLUCION:

Sea x el jornal del obrero
Los gastos de alimentación y vivienda son:
Alimentación $\frac{2x}{3}$
Habitación $\frac{x}{5}$
Gasto diario $\frac{2x}{3} + \frac{x}{5} = \frac{13x}{15}$
Gastos en un mes de 30 días: $30\left(\frac{13x}{15}\right) = 26x$
Enfermo 2 días, trabajó solo 28 días y su entrada fue de 28x.
Gastos imprevistos: 28x-26x =2x , en el mes ascendieron a 180bs
$\therefore 2x = 180 \rightarrow x = 90\ Bs, el\ jornal$

Criterios de calificación.-

i). Interpreta y escribe las fracciones de alimentación y vivienda: $\frac{2x}{3}$; $\frac{x}{5}$*….. (5 pts)*
ii). Establece el gasto diario y el gasto del mes $26\ x$*...............(10 pts)*
iii). Restando los días de enfermedad y los gastos imprevistos, termina la resolución (5 pts)
La sumatoria da los 20 puntos a esta pregunta

5. (20pts) Si A es la cantidad de números primos de dos cifras que terminan en 7, y B es la cantidad de números de cuatro cifras que terminan en 9 y que al ser divididos entre 47 dejan residuo 5. Calcula A+B.

SOLUCION:

A= Cantidad de números primos de dos cifras que terminan en 7.
$A = 17\ ,37\ ,47\ ,67\ ,97\ ;\ \ números\ cumplen\ con\ la\ condición$

$$\left.\begin{array}{cc} B = \overline{abc9} = \dot{47} + 5 & \\ B = \overline{abc9} = 47k + 5 & \\ 1039 & 22 \\ & 32 \\ & 42 \\ & 52 \\ & 62 \\ & \vdots \\ 9969 & 212 \end{array}\right\}$$

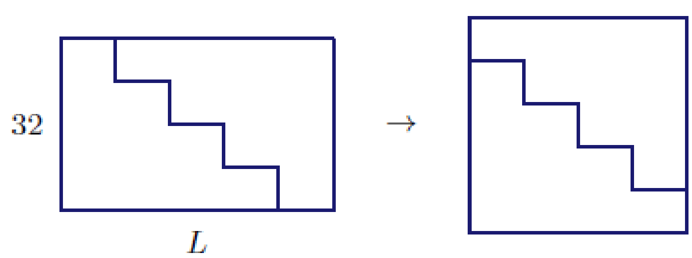
Observamos que B es múltiplo de 47 y para k cumplen los valores a partir de 22,32 solo los valores que terminan en 2 hasta 212.

$\therefore B = \dfrac{212-22}{10} + 1 = 20$

$A + B = 5 + 20 = 25.$

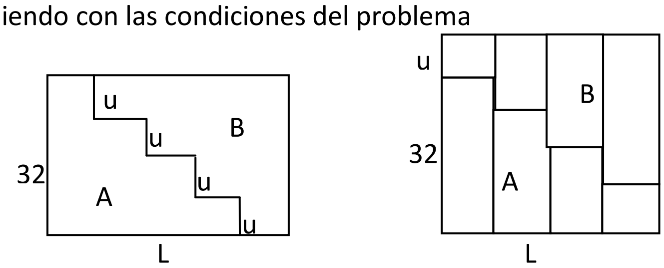
i). Determina A = 5; Escribiendo los cinco números terminados en 7 ….. (5 pts)
ii). Advierte que B debe ser múltiplo de 47 y que el numeral K iniciando en **22**, *debe terminar en* **2, hasta el 212……..(10 pts)**
iii). *Termina calculando* **B = 20** , *con lo que* **A + B = 25. . . (5pts).**
La sumatoria da los 20 puntos, asignados al problema

6. (15pts) Un rectángulo de 32 cm de alto y L cm de largo se ha dividido en dos partes y con esas partes se ha formado un cuadrado:



Calcule el valor de L.

SOLUCION: Cumpliendo con las condiciones del problema



$32 \div 4 = 8, \therefore el valor de u = 8$
El lado del cuadrado es 40; entonces su área es:
$A_{\blacksquare} = 40x40 = 1600u^2$Como ambas figuras tienen igual área; entonces:$32L = 1600$
entonces $L = 50$

i). Determina inmediatamente el valor de cada peldaño u = 8 ….. (5 pts)
ii). Advierte que el lado del cuadrado es **40**, *con lo que* $A_{\blacksquare} = 40x40 = 1600u^2$ ….(5 pts)
iii). Considera la igualdad de áreas de ambas figuras, calculando **L = 50** …(*5 pts*)
La sumatoria da el total **15** *puntos*

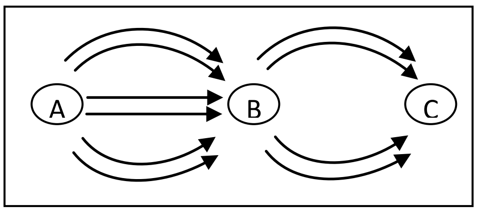
5ta OLIMPIADA CIENTIFICA ESTUDIANTIL PLURINACIONAL BOLIVIANA
30va OLIMPIADA BOLIVIANA DE MATEMATICA
2da Etapa (Examen Simultáneo)
3ero SECUNDARIA

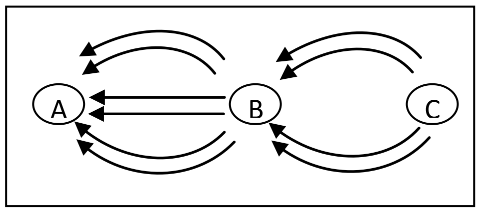
PREGUNTAS DE OPCIÓN MÚLTIPLE (Encierre en un círculo la respuesta correcta).

1. (15pts) Dos libros tenían el mismo precio. Por el Día del Libro, a uno de ellos se le hizo un descuento del 15% y al otro se le hizo un descuento del 25% y resultó que la diferencia de sus precios fue de 3 Bs. ¿Cuánto dinero ahorro una persona por comprar esos dos libros en el día del Libro, en vez de comprarlos antes?
A) 11 B) 12 C) 13 D) 14 E) 159

2. (15pts) Hay dos tipos de dragones: plateados y dorados. Cada dragón plateado tiene 4 alas y 3 colas. Cada dragón dorado tiene 2 alas y 4 colas. Un grupo de 30 dragones sobrevoló una ciudad y los habitantes contaron 109 colas en total, ¿cuántas alas hay en total?
A) 98 B) 86 C) 90 D) 82 E) 84

3. (15pts) De A a B hay 6 caminos diferentes y de B a C hay 4 caminos diferentes. ¿De cuántas maneras se puede hacer el viaje redondo de A a C pasando por B?





A) 574 B) 576 C) 578 D) 32 E) 64

PREGUNTAS DE DESARROLLO (Resuelva en la misma hoja)

4. (20pts) Un número representado con dos cifras y el número que resulta al invertir el orden de sus cifras se elevan al cuadrado. La diferencia de los resultados obtenidos es 495. Si sumamos dichos números de dos cifras y el resultado lo elevamos al cuadrado se obtiene un número cuya suma es:

SOLUCION:
Sea $\overline{ab}$ el número representado por dos cifras.
Según el problema.
$\overline{ab}^2 - \overline{ba}^2 = 495$ (I)
$(\overline{ab} + \overline{ba})(\overline{ab} - \overline{ba}) = 495$ (II)
$(10a + b + 10b + a)(10a + b - 10b - a) = 495$ (III)
$(11a + 11b)(9a - 9b) = 495$
$11(a + b)9(a - b) = 495$
$99(a + b)(a - b) = 495$
$(a + b)(a - b) = 5 * 1$
$a + b = 5 \quad (1)$
$a - b = 1 \quad (2)$
De (1) y (2): $a = 3 \ y \ b = 2$
$\rightarrow \overline{ab} = 32 \ y \ \overline{ba} = 23$
$\therefore Lasumaes: 32 + 23 = 55$
El problema pide: $(\overline{ab} + \overline{ba})^2 = (55)^2 = 3025 \ ylasumadesuscifrases: 3 + 0 + 2 + 5 = 10$
Criterios de calificación.-

i). Se orienta de la necesidad de la descomposición polinómica en el paso (III) (5 pts.)
ii). Hace el manejo algebraico hasta obtener los valores de $a = 3$ y $b = 2$, obteniendo los números de dos cifras: $\overline{ab} = 32 \ y \ \overline{ba} = 23$, cuya suma es 55 (10 pts)
iii) Concluye el problemasumando las cifras de 55^2= 10 (5pts)
La sumatoria da el puntaje total de 20 pts.
iv). Recurre a otro método lógico y resuelve el problema, en el marco racional (20 pts)

5. (15pts) En una recta se toman los puntos consecutivos U,N,C,P tal que N es punto medio de $\overline{UP}$.Hallar:

$$R=\frac{13\overline{NC}}{\overline{UC}-\overline{CP}}$$

SOLUCION:

Sea el gráfico:

Según el gráfico:

$\overline{UN}=\overline{PN}$

$\overline{UC}=\overline{UN}+\overline{NC}(1)$

$\overline{CP}=\overline{PN}-\overline{NC}(2)$

Resolviendo obtenemos.

$\frac{\overline{NC}}{\overline{UC}-\overline{CP}}=\frac{1}{2}\ multiplicamos\ por\ 13\ obtenemos:$

$R=\frac{13\overline{NC}}{\overline{UC}-\overline{CP}}=\frac{13}{2}=6.5$

i). Establece algunas relaciones útiles entre los segmentos en el intervalo **U y P***(5 pts)*
ii). Hace el manejo algebraico para llegar a la relación sugerida......... (10 pts)
La sumatoria da el total de **15** *pts.*
iii). Recurre a otro método gráfico y resuelve satisfactoriamente el problema (15 pts)

6. (20pts) En la siguiente figura, los triángulos ABC, DEF, PBQ son equiláteros, y sus perímetros son 111 cm, 99 cm, 24 cm, respectivamente. Determine el perímetro del triángulo equilátero RSF.

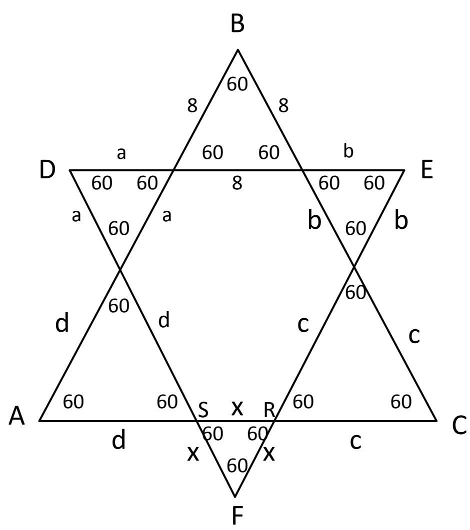
SOLUCION:

Trabajando en la figura

△ABC, perímetro =111 → lado = 37

△DEF, perímetro =99 → lado = 33

△PBQ, perímetro =24 → lado = 8



En el lado BC

$b+c+8=37$

$b+c=29\quad(2)$

El lado AB = BC

$b+c+8=a+d+8$

$b+c=a+d=29$

En el lado DF

$a+d+x=33$

$29+x=33$

$x=4$

El perímetro del triángulo RSF es: 4+4 + 4 = 12

i). Dadas las características de los triángulos, establece relaciones en diferentes tramos de los triángulos; en el lado BC, AB, DF.... **(10** *pts)*
ii). Hace el manejo algebraico con las relaciones anteriores, hasta obtener que el lado del triángulo RSF es x = 4 **(5** *pts)*
iii). Termina de resolver el problema, calculando el perímetro del triángulo en cuestión (5pts)
Los puntos anteriores van en sumatoria
iv). Recurre a otras relaciones y formas para resolver el problema a satisfacción **(20** *pts)*

5ta OLIMPIADA CIENTIFICA ESTUDIANTIL PLURINACIONAL BOLIVIANA
30va OLIMPIADA BOLIVIANA DE MATEMATICA
2^{da} Etapa (Examen Simultáneo)
4^{to} SECUNDARIA

PREGUNTAS DE OPCIÓN MÚLTIPLE (Encierre en un círculo la respuesta correcta).

1. (15pts) ¿Cuál es el menor entero positivo por el cual hay que multiplicar a 150 para obtener un cubo perfecto? Dé como respuesta el resto de dividir dicho número entre 11.
A) 8 B) 18 C) 9 D) 10 E) 4

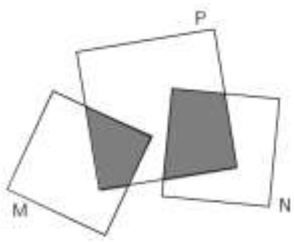
2. (15pts). Un cierto número de dos dígitos es igual a 9 veces la suma de sus dígitos. Si se restaran 63 unidades al número, los dígitos se invertirán. ¿Cuál es el número?

A) 81 B) 18 C) 9 D) 10 E) 44

3. (15pts) En una rifa se han hecho 1000 papeletas, numeradas del 000 al 999. ¿Cuántos números capicúas hay? (Ejemplo 121)
A) 101 B) 102 C) 91 D) 100 E) 150

PREGUNTAS DE DESARROLLO (Resuelva en la misma hoja)

4. (20pts) La gráfica muestra tres cuadrados: M, N y P.



Sabiendo que:
$\frac{1}{3}$ del cuadrado M está sombreado.
$\frac{1}{2}$ del cuadrado N está pintado
$\frac{1}{4}$ del cuadrado P está pintado.
Además, la suma de las áreas de M y N es igual a $\frac{2}{3}$ del área de P.
Encuentre el valor de: $K = \frac{Area\ M}{Area\ N}$

SOLUCION:
Designando por M, N, P áreas de los cuadrados
Del problema
$M + N = \frac{2}{3}p(1)$
$\frac{1}{4}P = \frac{1}{3}M + \frac{1}{2}N$ (2) (Por el gráfico)
Resolviendo el sistema en términos de M y N
$\frac{3}{8}M + \frac{3}{8}N = \frac{1}{3}M + \frac{1}{2}N \rightarrow \frac{3}{8}M - \frac{1}{3}M = \frac{1}{2}N - \frac{3}{8}N$
$\frac{M}{24} = \frac{N}{8}$ de donde:
$k = \frac{AreadeM}{AreadeN} = 3$

Criterios de calificación.-
i). Usa las consideraciones y los datos del problema, para conformar el sistema de ecuaciones (1) y (2) ...... (10 pts)
ii). Algebrisa el sistema, buscando la relación de áreas y concluye que $k = \frac{AreadeM}{AreadeN} = 3$
(10 pts)
La sumatoria de los dos puntos da los 20 pts asignados al problema
iii). Ingeniosamente, encuentra otra forma de solución que satisfaga la pregunta (20 pts)

5. (15pts) Sea A la suma de las raíces de $ax^2 + bx + c = 0$
y B la suma de las raíces de $a(x+1)^2 + b(x+1) + c = 0$
Hallar el valor de B – A.

SOLUCIÓN:
La ecuación $ax^2 + bx + c = 0$; se escribe en la forma:

$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$; si x_1 y x_2 sus raíces

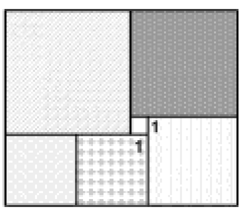
Entonces $A = x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$
Operando de la misma forma en la ecuación:

$$a(x+1)^2 + b(x+1) + c = 0$$
$$B = x_1 + x_2 = -\frac{2a+b}{a} = -2 - \frac{b}{a}$$

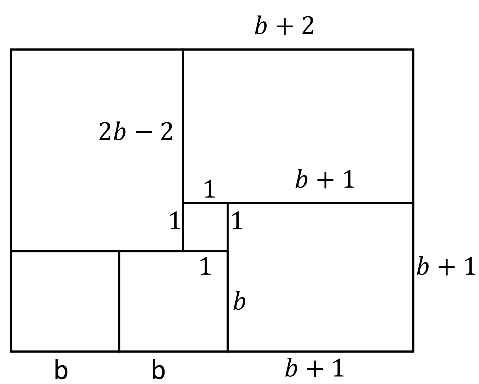
De donde $B - A = -2$

i). Determina A como la suma de las raíces de la primera ecuación: **A** $= -\frac{b}{a}$ ... **(5 pts)**
ii). Usa el mismo procedimiento para determinar B en la segunda ecuación:
$\boldsymbol{B} = -2 - \frac{b}{a}$ . . . *(7 pts)*
iii). Termina de operar respondiendo a la interrogante del problema $B - A = -2$ (3 pts)

6. (20pts) El rectángulo de la figura está dividido en seis cuadrados. La longitud de los lados del cuadrado más pequeño es 1cm. ¿Cuál es la longitud de los lados del cuadrado más grande?



SOLUCION:



Trabajando en la figura. La solución es **analítica**
Se dispone **lado = 1**, al cuadrado pequeño.
Se asigna **lado b** a los cuadrados basales de la izquierda
Con el referente anterior se designan los lados de todos
Los cuadrados, de tal manera que resulta:
$2b - 2 = b + 2$
$b = 4$
El lado del cuadrado grande es
$2b - 1$
$2(4) - 1 = 8 - 1 = 7$

i). Acepta el referente de lado **1, para el cuadrado más pequeño, y** *busca la mejor opción para asignar valores a los lados de los cuadrados que se muestran exactamente iguales (lado b, cuadrados basales lado izquierdo).* . . . (**5 pts**)
ii). Reasigna valores a los lados de los cuadrados con el referente anterior . . . **(10 pts)**
iii). Concluye con: $\mathbf{2b - 2 = b + 2}$ ⇨ *lado del cuadrado más grande* *7* . . . **(5 pts)**
La sumatoria da los **20** *pts totales*
iV). Ingeniosamente desarrolla otra metodología de resolución, que satisface la pregunta del problema. . . . **(20 pts)**

5ta OLIMPIADA CIENTIFICA ESTUDIANTIL PLURINACIONAL BOLIVIANA
30va OLIMPIADA BOLIVIANA DE MATEMATICA
2da Etapa (Examen Simultáneo)
5to SECUNDARIA

PREGUNTAS DE OPCIÓN MÚLTIPLE (Encierre en un círculo la respuesta correcta).

1. (15pts) El número de términos de una progresión geométrica creciente es 6, la suma de todos ellos es 364 y la diferencia entre el cuarto término y el tercero es igual al séxtuplo del segundo. ¿Cuál es el quinto término?
A) 81 B) 18 C) 91 D) 13 E) 85

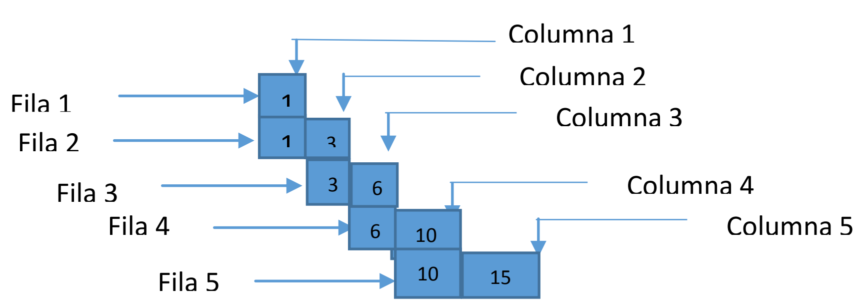
2. (15pts) Calcular el valor de E en:
$E = 11 + 101 + 1001 + 10001 + \cdots \underbrace{1000\ldots\ 01}_{100 cifras}$
A) $\frac{10}{9}(10^{99}-1)+99$ B) $\frac{10}{9}(10^{98}-1)+99$ C) $\frac{9}{10}(10^{99}-1)+99$ D) 99 E) 98

3. (15pts)Con los dígitos 1,2,3,4,5,6,7,9 ¿Cuántos números de cuatro cifras pueden formarse si los dos primeros(unidad de mil y centena) son impares y los demás (decena y unidad) son pares? Además en un mismo número las cifras no se repiten.
A) 101 B) 102 C) 91 D) 100 E) 120

PREGUNTAS DE DESARROLLO (Resuelva en la misma hoja)

4. (15pts) Resolver el sistema:
$x^2 - y^2 = 2 \ldots (1)$
$\log_2(x+y) - \log_3(x-y) = 1 \ldots (2)$

SOLUCIÓN:
$x^2 - y^2 = 2$ (1)
$\log_2(x+y) - \log_3(x-y) = 1$ (2)
De (1) $(x+y)(x-y) = 2 \Longrightarrow x + y = \frac{2}{x-y}$ (3)
(3) en (2) $\log_2\left(\frac{2}{x-y}\right) - \log_3(x-y) = 1$
$\log_2(x-y) + \log_3(x-y) = 0$
Cambio de base: $\frac{\log_3(x-y)}{\log_3 2} + \log_3(x-y) = 0$
$(1+\log_3 2)\log_3(x-y) = 0$
Como $(1+\log_3 2) \neq 0 \Longrightarrow log_3(x-y) = 0$
$\Longrightarrow x - y = 1$ $x = \frac{3}{2}$
En (3) $x + y = 2$ $y = \frac{1}{2}$
Criterios de calificación.-
i). Reconoce la diferencia de cuadrados en la ecuación (1) y despeja: $x + y = \frac{2}{x-y}$. . . (3 pts)
ii). Reemplaza el despeje anterior en la ec. (2) además de cumplir con el cambio de base del logaritmo (base 3) . . . (7 pts)
iii). Algebriza la expresión logarítmica convenientemente hasta llegar a la solución $x = \frac{3}{2}$
$y = \frac{1}{2}$ . . . **(5 pts). La sumatoria de los puntos da los 15 puntos**
5. (20pts) Calcular la suma de los elementos de la fila 2014 y agregar la suma de los elementos de la columna 2015.



SOLUCIÓN:

Suma de filas | Suma de columnas

$f_1 = 1 = 1$ $\quad C_1 = 1 + 1 = 2 = 1.2$

$f_2 = 1 + 3 = 4 = 2^2 C_2 = 3 + 3 = 6 = 2.3$

$f_3 = 3 + 6 = 9 = 3^2 C_3 = 6 + 6 = 12 = 3.4$

$f_4 = 6 + 10 = 16 = 4^2 C_4 = 10 + 10 = 20 = 4.5$

.

.

.

$f_n = n^2 C_m = m(m + 1)$

$f_{2014} = 2014^2 C_{2015} = 2015(2016)$

$f_{2014} \quad + \ C_{2015} = 2014^2 + 2015 * 2016 = 8118436$

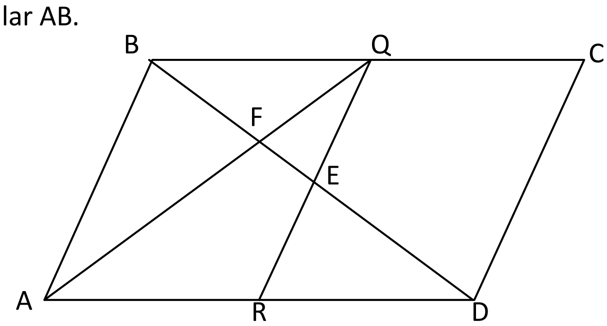
Criterios de calificación.-

i). Considerando el esquema, se da cuenta del manejo de las funciones en términos de su generalización, hasta obtener: $f_{2014} = 2014^2$ *y* $C_{2015} = 2015(2016)$ . . . *(15 pts)*

ii). Completa la solución, con la suma requerida. . . (5 pts)

La sumatoria da el total de puntos asignados a la pregunta.

6. (20pts) Si ABCD es un paralelogramo donde FB=3; R , Q puntos medios de AD y BC respectivamente. Hallar AB.



SOLUCION:

De la figura

$\overline{AD} = 2\overline{BQ} \;\; y \;\; \overline{FD} = 2\overline{BF} \rightarrow \overline{FD} = 2 * 3 = 6$

Los triángulos EBQ y RED son isósceles entonces

$\overline{EQ} = \overline{EB} = \overline{EF} + \overline{FB}$

$\overline{EQ} = \overline{EF} + 3 \qquad (1)$

Además:

$\overline{RE} = \overline{ED}$

$\overline{RE} = \overline{FD} - \overline{EF} = 6 - \overline{EF} \qquad (2)$

$\therefore \ \overline{RQ} = \overline{RE} + \overline{EQ}$ De (1) y (2)

$\overline{RQ} = 6 - \overline{EF} + \overline{EF} + 3$

$\overline{RQ} = 9 = \overline{AB}$

i). Por las características de la construcción $\overline{AD} = 2\overline{BQ} \;\; y \;\; \overline{FD} = 2\overline{BF} \rightarrow \overline{FD} = 2 * 3 = 6,$ *visualiza este primer aporte para la solución de su problema. . .* **(5 pts)**

ii). Caracteriza a los triángulos formados en el interior del paralelogramo, como EBQ y RED isósceles ambos. . . (5 pts)

iii). Utiliza a los triángulos isósceles, para establecer las relaciones **(1)** *y* **(2)** *. . .* **(5pts)**

iv). Concluye la solución, reemplazando **(1)** *y* **(2)** *en* $\overline{RQ} = \overline{RE} + \overline{EQ}$; $\overline{RQ} = 9 = \overline{AB}$ . . **(5 pts)**

La sumatoria da el total de puntos asignados al problema, **20 puntos**

v). *Ingeniosamente el estudiante opta por otra forma de resolución que satisface la interrogante del problema. . .* **(20 pts)**

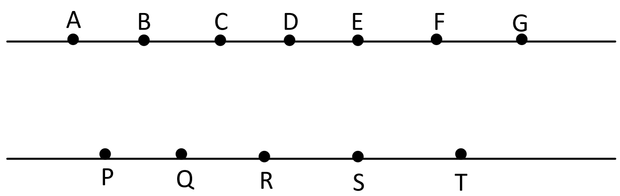
5ta OLIMPIADA CIENTIFICA ESTUDIANTIL PLURINACIONAL BOLIVIANA
30va OLIMPIADA BOLIVIANA DE MATEMATICA
2^{da} Etapa (Examen Simultáneo)
6^{to} SECUNDARIA

PREGUNTAS DE OPCIÓN MÚLTIPLE (Encerrar en un círculo la respuesta correcta)

1. (15pts)Sea θ un ángulo agudo para el cual se cumple que: $2cos^2\theta - 3sen^2\theta = \frac{19}{12}$.
   Calcula el valor de $(2\cot\theta)^2$.

21 B) 33 C) 10 D) 44 E) 21

2. (15pts) Dada la figura ¿cuántos triángulos pueden formarse con vértices en 3 de los 12 puntos dados si las dos rectas con paralelas?



A) 175 B) 199 C) 300 D) 281 E) 330

3. (15pts) Hallar a + b + c; Si a! + b! + c! = $\overline{abc}$

A) 21 B) 33 C) 10 D) 44 E) 21

PREGUNTAS DE DESARROLLO (Resuelva en la misma hoja)

4. (20pts) Se tiene que: $f(x) = \frac{1}{x+1}$.
   Calcular el valor de: $f\left(\frac{1}{1}\right) + f\left(\frac{1}{2}\right) + f\left(\frac{1}{3}\right) + \cdots + f\left(\frac{1}{100}\right) + f(1) + f(2) + f(3) + \cdots + f(100)$

SOLUCION:

De la función

$$f(x) = \frac{1}{x+1}$$

$$\left.\begin{aligned} f(1) &= \frac{1}{2} \\ f(2) &= \frac{1}{3} \\ f(3) &= \frac{1}{4} \\ &\vdots \\ f(100) &= \frac{1}{101} \end{aligned}\right\} s/m/m \qquad \left.\begin{aligned} f\left(\frac{1}{1}\right) &= \frac{1}{2} \\ f\left(\frac{1}{2}\right) &= \frac{2}{3} \\ f\left(\frac{1}{3}\right) &= \frac{3}{4} \\ &\vdots \\ f\left(\frac{1}{100}\right) &= \frac{100}{101} \end{aligned}\right\} s/m/m$$

$$f(1) + f(2) + \cdots + f(100) = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{101} \quad (1)$$

$$f\left(\frac{1}{1}\right) + f\left(\frac{1}{2}\right) + \cdots + f\left(\frac{1}{100}\right) = \frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \cdots + \frac{100}{101} \quad (2)$$

Sumando (1) y (2)

$$S = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3} + \frac{2}{3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{101} + \frac{100}{101}\right)$$

$$S = 1 + 1 + 1 + \cdots + 1 = 100$$

Criterios de calificación.-

i). Visualiza las funciones en sus dos formas y dispone la sumatoria de ambas, conducentes a la generalización, identificadas en **(1) y (2)** . . **(10 pts)**

ii). Agrupa convenientemente las sumas, buscando la simplificación, mostrando:

$S = 1 + 1 + 1 + \cdots + 1 = 100$ . . . **(10 pts)**

La sumatoria de los puntos da el puntaje total asignado a la pregunta, 20 puntos

5. (20pts) En la siguiente igualdad: $\frac{\overline{MATE}}{\overline{MATICA}} = \frac{2}{201}$ Se sabe que: I = 7; T es un número primo y ninguno de los dígitos mostrados es = 0. Hallar: E + T + C

SOLUCION:

Como $\frac{\overline{MATE}}{\overline{MATICA}} = \frac{2}{201}$

$\rightarrow \quad \frac{10 * \overline{MAT} + E}{1000 * \overline{MAT} + \overline{ICA}} = \frac{2}{201} \quad por\ descomposición$

$\rightarrow \quad 10 * \overline{MAT} + 201 * E = 2 * \overline{ICA}$

$\rightarrow \quad 10 * \overline{MAT} + 201 * E = 2 * \overline{7CA}$, de donde: $1400 < 2 * \overline{7CA}\ (par) < 1600$

Si $E \geq 4 \rightarrow 10 * \overline{MAT} + 201 * E > 1800$, entonces: $E = 2$

$\rightarrow \quad 5 * \overline{MAT} + 201 = \overline{7CA}$, de donde: $700 < \overline{7CA} < 800$, entonces: $M = 1$,

$\rightarrow \quad 5 * \overline{1AT} + 201 = \overline{7CA}$, entonces $A = 1$ ó 6. Si $A = 6 \ \rightarrow\ 5 * \overline{1AT} + 201 > 1000$, entonces: $A = 1$.

$\rightarrow \quad 5 * \overline{11T} + 201 = \overline{7C1}$, entonces T es par, en consecuencia $T = 2$ (2 primo y par)

$\rightarrow \quad 761 = \overline{7C1}$, entonces $C = 6$. En consecuencia $E + T + C = 2 + 2 + 6 = 10$

Criterios de calificación.-

i). Se orienta de la descomposición polinómica, de $\frac{\overline{MATE}}{\overline{MATICA}} = \frac{2}{201}$ *a*
$10 * \overline{MAT} + 201 * E = 2 * \overline{ICA} \ldots\ldots (5\ pts)$

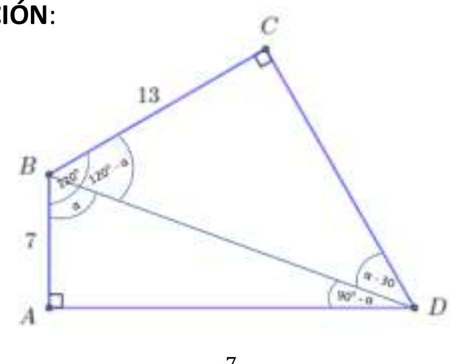
ii). Considera el intervalo $1400 < 2 * \overline{7CA}\ (par) < 1600$, *para obtener el valor de* E = 2. *La misma consideración para obtener* M = 1 . . . (5 pts)

iii). Considerando la expresión: $5 * \overline{MAT} + 201$, *donde A solo puede ser* 1 *o 6, se opta racionalmente que A* = 1 . . . **(5 pts)**

iv). A partir de la relación $5 * \overline{11T} + 201 = \overline{7C1}$ *se analiza y se deduce que T = 2; cuya sustitución permite determinar que C = 6 . En consecuencia:* $E + T + C = 2 + 2 + 6 = 10$

6. (15pts) En el cuadrilátero ABCD se cumple que $\measuredangle BAD = \measuredangle BCD = 90^0, \measuredangle ABC = 120^0$,
$BC = 13\ y\ AB = 7.$
Calcule la diferencia de las longitudes de los segmentos AD y CD

SOLUCIÓN:



Hallar:

AD – CD = ?

90° – 120° + α = α – 30°

$$\left.\begin{array}{ll} \Delta\, DAB & AD = \sqrt{BD^2 - 7^2} \\ \Delta\, DCB & CD = \sqrt{BD^2 - 13^2} \end{array}\right\} \text{(I)}$$

Del △ DAB: sen(90-α) = $\frac{7}{BD}$ (1)

Del △ DCB: sen(α-30) = $\frac{13}{BD}$ (2)

De (1) cosα = $\frac{7}{BD}$ (3) $\Rightarrow$ senα = $\frac{\sqrt{BD^2-49}}{BD}$

De (2) senα cos30° – cosα sen30° = $\frac{13}{BD}$

$$\frac{\sqrt{BD^2 - 49}}{BD} * \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{7}{BD} * \frac{1}{2} = \frac{13}{BD}$$

$$\sqrt{BD^2 - 49} = \frac{33}{\sqrt{3}}$$

$BD^2 = 412$

Reemplazando en (I)

$AD = 11\sqrt{3}$

$CD = 9\sqrt{3}$

$\therefore \boldsymbol{AD - CD = 2\sqrt{3}}$

Criterios de calificación.-

i).Visualiza los dos triángulos rectángulos, BAD y BCD; se orienta de la necesidad de determinar los ángulos agudos de cada uno; obteniendo: $90^{o} - 120^{o} + \alpha = \alpha - 30^{o}$ y $90^{o} - \alpha$*,además define:* $AD = \sqrt{BD^2 - 7^2}$ *y* $CD = \sqrt{BD^2 - 13^2}$ *con Pitágoras en ambos triángulos rectángulos . . . . (***5 pts***)*

ii). Utiliza relaciones trigonométricas que involucren a BD, hasta obtener $BD^2 = 412$. . . *(5 pts)*

iii). Completa la resolución reemplazando el resultados anterior en (I*)*

$$AD = 11\sqrt{3}$$
$$CD = 9\sqrt{3}$$

$\therefore \boldsymbol{AD - CD = 2\sqrt{3}}$ . . . . (5 pts)

La sumatoria de los puntos da el puntaje total asignado a esta pregunta

vi). Ingeniosamente el estudiante opta otra ruta de resolución lógica, que satisface con solvencia la pregunta . . . . (**15 pts***)*