Solución del 6to. nivel (2da. etapa)
2da. Olimpiada Científica Estudiantil Plurinacional Boliviana
Responzable: Mgr. Alvaro H. Carrasco C.

1. Descomponemos el área dada como sigue

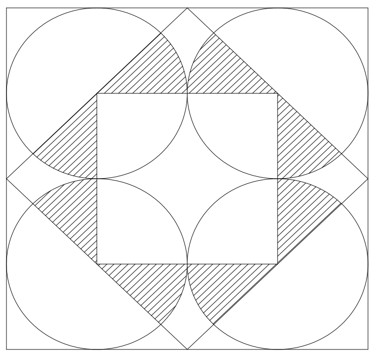


Figura 1

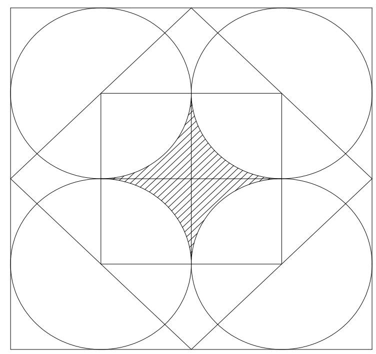


Figura 2

Observemos que en la figura 1, se tiene que cada región corresponde a la octava parte de la circunferencia de radio $\frac{1}{4}$ y como hay ocho entonces el área en esta figura es igual al de una circunferencia de radio $\frac{1}{4}$ esto es $\frac{\pi}{16}$. En la figura 2 dividiendo el área en cuatro partes, una de ellas es igual a

$$\left(\frac{1}{4}\right)^2 - \frac{1}{4}\pi\left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{1}{16} - \frac{1}{64}\pi$$

Entonces el área total es $\frac{\pi}{16} + 4\left(\frac{1}{16} - \frac{1}{64}\pi\right) = \frac{1}{4}$ y como el área del cuadrado es 1 habrá que multiplicar por $\frac{1}{4}$ para obtener el área sombreada

$\boxed{\text{Respuesta es (b)}}$

2. Hacemos el cambio $z = sen(x)$ y tenemos

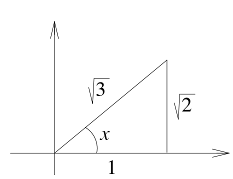
$$\frac{1}{1-z} + \frac{1}{1+z} = 6$$

simplificando esta ecuación tenemos:

$$3z^2 = 2$$

resolviendo se tiene $z_1 = \sqrt{\frac{2}{3}}$ y $z_2 = -\sqrt{\frac{2}{3}}$, como $0 < x < \frac{\pi}{2}$ se sigue que $0 \leq sen(x) \leq 1$, de manera que solo consideramos la primera solución, de donde tenemos

$$sen(x) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$$



y entonces

$$\tan(x) = \sqrt{2}$$

$\boxed{\text{Respuesta es (d)}}$

3. Sea x el número de muchachos, entonces la suma que pagan ellos y ellas es igual a

$$30(8) + x10 = 10x + 240$$

Si se invierten los precios ellos y ellas pagan

$$30(10) + x8 = 8x + 300$$

y como este costo es 6 menos que el costo anterior tenemos

$$8x + 300 + 6 = 10x + 240$$

de donde se tiene $x = 33$.

$\boxed{\text{Respuesta es (c)}}$

4. Sea $49^x = z$ entonces tenemos

$$z + z^{-1} = 7$$

simplificando tenemos

$$z^2 - 7z + 1 = 0$$

resolviendo se tiene

$$z = \frac{7 \pm \sqrt{45}}{2}$$

volviendo el cambio de variable tenemos

$$49^x = \frac{7 \pm \sqrt{45}}{2}$$

y se tiene las soluciones

$$\alpha = \frac{1}{2}\log_7\left(\frac{7+\sqrt{45}}{2}\right) \qquad \text{y} \qquad \beta = \frac{1}{2}\log_7\left(\frac{7-\sqrt{45}}{2}\right)$$

luego

$$\begin{aligned}
(7^{\alpha})(7^{\beta}) &= 7^{\frac{1}{2}\log_7\left(\frac{7+\sqrt{45}}{2}\right)}7^{\frac{1}{2}\log_7\left(\frac{7-\sqrt{45}}{2}\right)} = 7^{\frac{1}{2}\log_7\left(\frac{7+\sqrt{45}}{2}\right)+\frac{1}{2}\log_7\left(\frac{7-\sqrt{45}}{2}\right)} \\
&= 7^{\frac{1}{2}\left(\log_7\left(\frac{7+\sqrt{45}}{2}\right)+\log_7\left(\frac{7-\sqrt{45}}{2}\right)\right)} = 7^{\frac{1}{2}\log_7\left(\frac{7+\sqrt{45}}{2}\frac{7-\sqrt{45}}{2}\right)} \\
&= 7^{\frac{1}{2}\log_7\left(\frac{49-45}{4}\right)} = 7^{\frac{1}{2}\log_7(1)} = 7^{\frac{1}{2}(0)} = 1
\end{aligned}$$

$\boxed{\text{Respuesta es (a)}}$

5. Tenemos tres casos

Caso1: Cuando el número tiene un dos como centena, existe un número: 210

Caso2: Cuando el número tiene un dos como decena:

$\square 21$ ó $\square 20$, observemos que el cuadrado se llena con las siguientes posibilidades: 3,4,5,6,7,8,9, entonces hay 14 números.

Caso 3: Cuando el número tiene un dos como unidad:

$\square 32, \square 42, \square 52, \square 62, \square 72, \square 82$ y los cuadrados se pueden llenar de $6, 5, 4, 3, 2, 1$ posibilidades respectivamente, entonces hay $6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 21$ números

En total hay $1 + 14 + 21 = 36$

$\boxed{\text{Respuesta es (b)}}$